Toutes les réponses doivent être justifiées sauf mention explicite du contraire. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note.

Exercice 1. Soit g une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dont l'ensemble de définition est $[0,1]$. Quelle est la définition de "g a pour limite 2 en 1" ?

Exercice 2.

1. Pour deux assertions A, B quelconques, $A \oplus B$ signifie "exactement une des deux assertions est vraie".
   (a) Faire le tableau de vérité de $A \oplus B$.
   (b) Montrer que $A \oplus B \Leftrightarrow (A \wedge \rceil B) \vee (\rceil A \wedge B)$.
2. Soit E un ensemble et soient C, D des parties de E, on définit $C\Delta D = (C \setminus D) \cup (D \setminus C)$.
   (a) Soit $x \in E$. Montrer que $x \in C\Delta D \Leftrightarrow ((x \in C) \oplus (x \in D))$.
   (b) Représenter, sans justifier, les deux ensembles $P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$, $Q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | xy = 0\}$. Puis $P\Delta Q$.

Exercice 3. On pose les applications suivantes

$$f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \quad n \mapsto 3n+1 \qquad g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \quad n \mapsto -n \qquad h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \quad n \mapsto n^2 .$$

1. Montrer que l'application $g \circ g$ est l'identité de $\mathbf{Z}$.
2. Montrer que $h(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{N}$ et montrer que $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$.
3. Les applications f, g, h sont-elles injective, surjective, bijective ?

Exercice 4. On note $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x = y^3\}$.

1. Montrer que Γ est le graphe d'une fonction f. On précisera l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de f.
2. Montrer que f est une application.
3. Donner l'expression de f.
4. Montrer que f est bijective. Donner l'application réciproque de f.

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Montrer l'assertion suivante

$$((\exists m \in \mathbf{N}, b = ma) \wedge (\exists n \in \mathbf{N}, a = nb)) \Rightarrow a = b .$$

Exercice 6. Soit E un ensemble non vide et soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.